

**graph**

# Graph

## 5.1 圖的基本概念

日常生活中，常常將複雜的觀念或是問題使用圖型來表達，相對於文字的敘述更容易傳達訊息，例如：化學結構圖、生態食物鏈、交通路網圖等。



5-1 台東市公路地圖

### 一、圖的基本定義

這裡談的「圖」並不是指圖片或者圖形，「圖」是一種用來記錄關聯、關係的東西。一張圖由有限個點與邊所組成。邊用來連接點和點，表示這兩點之間有關聯、關係。實際上，樹也是圖的一種，可以當作成任兩點間都相通，且沒有循環的圖，例如：圖 5-2，是一棵二元樹，同時也是一張有 7 個點和 6 條邊的圖。

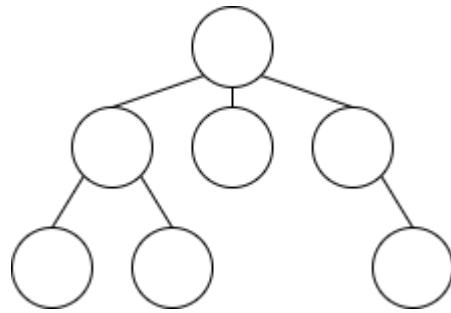


圖 5-2 同時為二元樹的圖

圖的重要觀念，就是如何表達點和點的關係，因此在圖中點的大小和形狀不拘，習慣上使用圓圈或是方形表示(圖 A、B)；邊的粗細與長短也不限，可以是直的也可以是彎的(圖 C)。點的位置也能夠隨意改變，只要不改變點和點之間的關係，都是連接方式相同的圖，例如以下四張圖都是相同意義的圖。

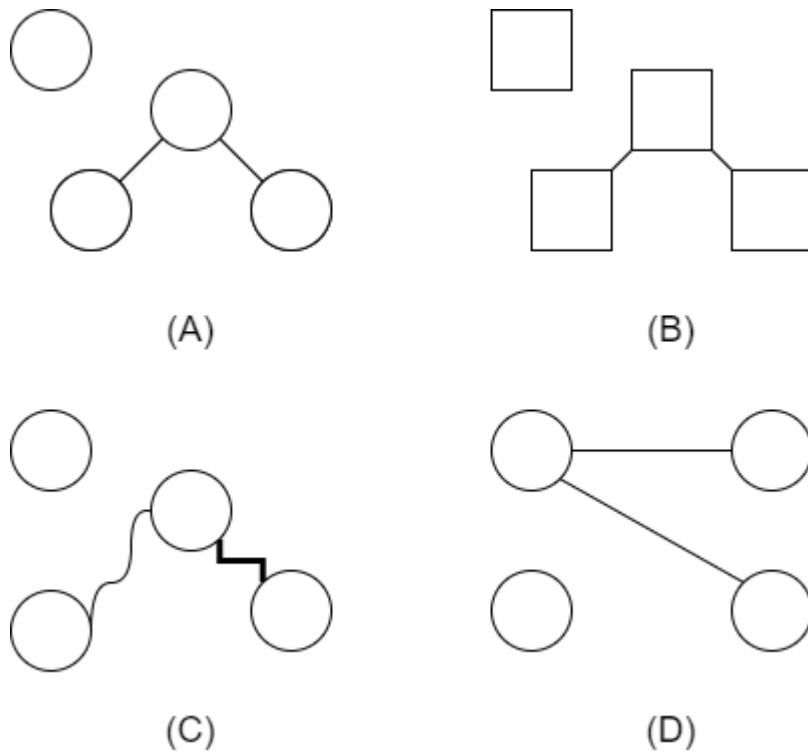


圖 5-3 圖的形狀

## 二、邊的特性

圖的兩點之間可以有很多條邊，代表這兩點有很多項關聯；甚至在有向圖中有自己連到自己的邊，表示自己和自己有項關聯。

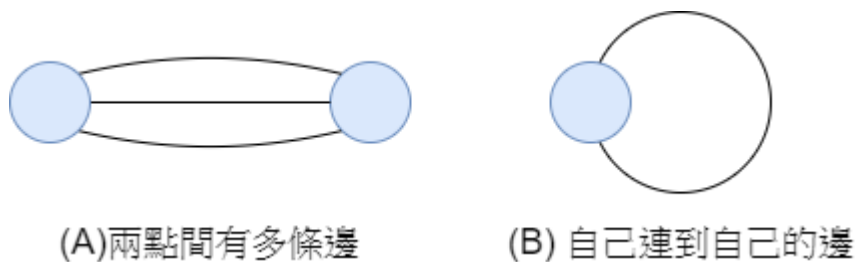


圖 5-4 邊的特性

邊可具有方向性。無方向性的邊稱為**無向邊**，表示這兩點的關係是雙向的，無向邊就像是雙向道，兩邊都可以通行，由無向邊組成的圖稱為**無向圖**；有方向性的邊稱為**有向邊**，表示這兩點的關係是單向的，有向邊就像是單行道，常用箭頭  $\rightarrow$  表示方向性，只能依箭頭方向通行，由有向邊組成的圖稱為**有向圖**。(圖 5-5)

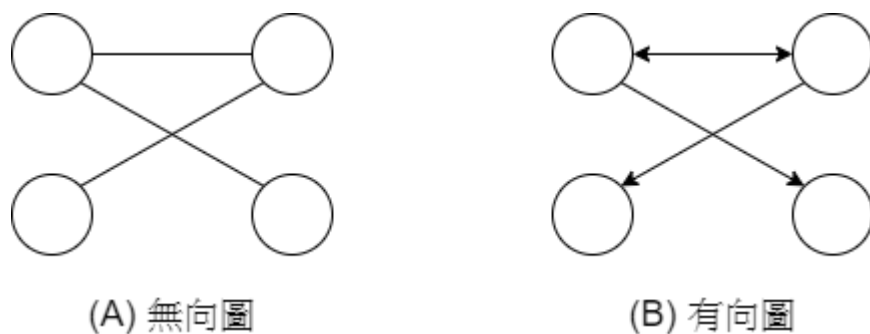


圖 5-5 無向圖與有向圖

### 三、圖的基本表示法

點和邊可以邊是名稱，如下圖 5-6-1，該圖形有 A、B、C、D 四個點及 AB、AD、BC 三條邊。習慣上會用大寫英文字母 G 表示圖、V 表示點集合、E 表示邊集合，因此下圖可以表示為：

- $V(G) = \{A, B, C, D\}$
- $E(G) = \{(A, B), (A, D), (B, C)\}$

上述邊是使用小括號括起的兩個點，例如： $(A, B)$ 表示從點 A 到 B 之間存在一條邊。

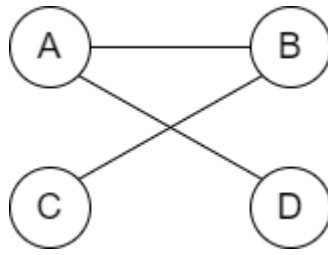


圖 5-6-1 無向圖

若圖形為有向圖 (圖 5-6-2) 時，則可如下所示：

- $V(G) = \{A, B, C, D\}$
- $E(G) = \{<A, B>, <A, D>, <B, A>, <B, C>\}$

上述邊為有向邊，因此改採用尖括號括起的兩個點，例如： $(A, B)$ 表示可以從 A 通往到 B。

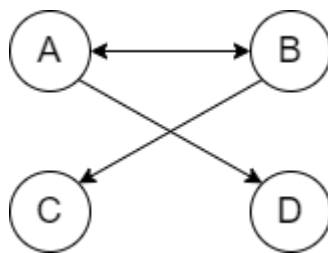


圖 5-6-2 有向圖

## 五、圖有權重

圖的邊可以標示權重，用來表示點和點之間的資訊，例如：關係的緊密程度，城市間的距離等。

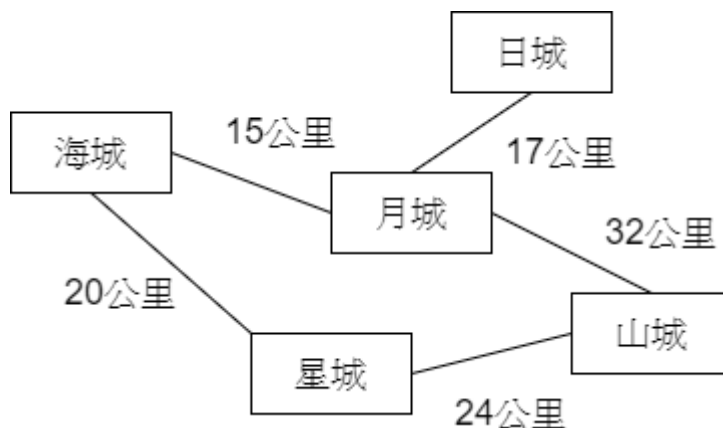


圖 5-7 城市距離圖

## 六、圖的路徑與路徑長

**路徑**是指由某一點到另外一點所經過的點集合，路徑可能有多條，如下圖所示， $A \rightarrow B$  與  $A \rightarrow D \rightarrow B$  兩條路徑都為  $A$  到  $B$  的路徑。**路徑長** 則是路徑上經過的邊數量，如  $A \rightarrow D \rightarrow B$  的路徑長為 2，若是圖為有權重的圖，則路徑長為該路徑所經過邊的權重值總和，如  $A \rightarrow D \rightarrow B$  的路徑長為  $5 + 4 = 9$ 。

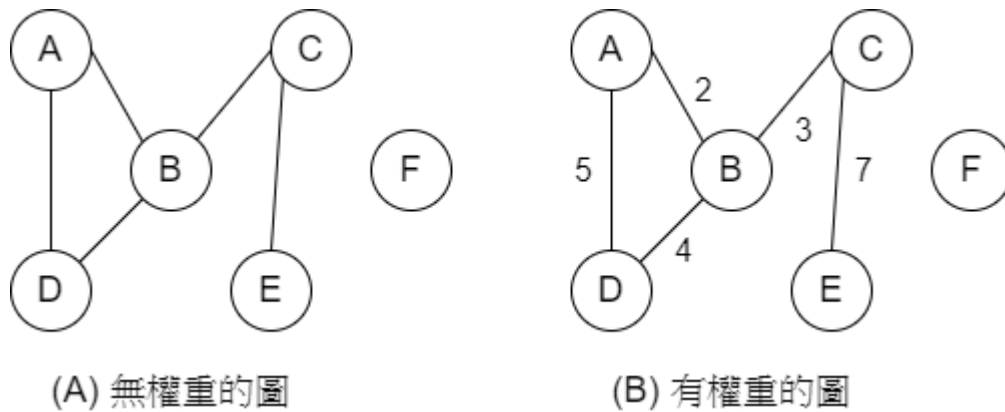
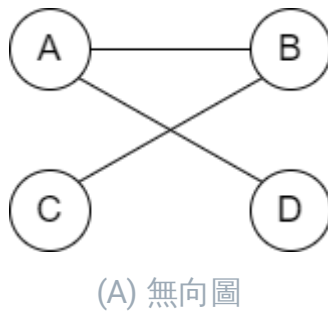
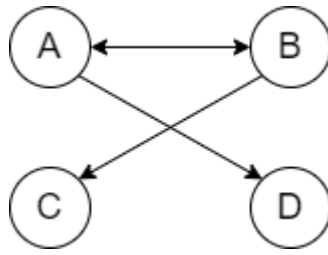


圖 5-8

## 七、分支度

點的**分支度**，在無向圖中是指某點有上多少條邊。而在有向圖可以區分成**出分支度**與**入分支度**，出分支度為某點向外指向其他點的箭頭數量；入分支度則是相反，為指向自己的箭頭數量，而有向圖的分支度為出分支度加入分支度。例如：下圖無向圖的  $B$  點分支度為 2；有向圖的  $B$  點出分支度為 2、入分支度為 1，因此分支度為  $2+1=3$ 。





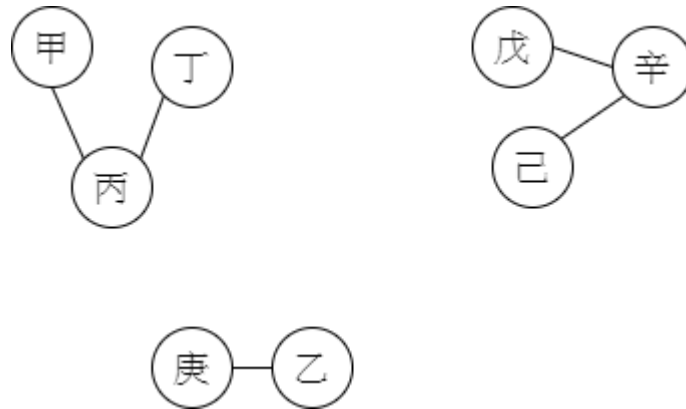
(B) 有向圖

## 練習

1. 依據下列每個人所說的內容，用「圖」判斷有幾個班級數。

1. 甲：「我跟丙同班，但跟乙不同班」。
2. 丁：「我跟丙同班」。
3. 戊：「我跟甲、乙都不同班」。
4. 庚：「我跟乙同班」。
5. 辛：「我跟戊、己同班」。

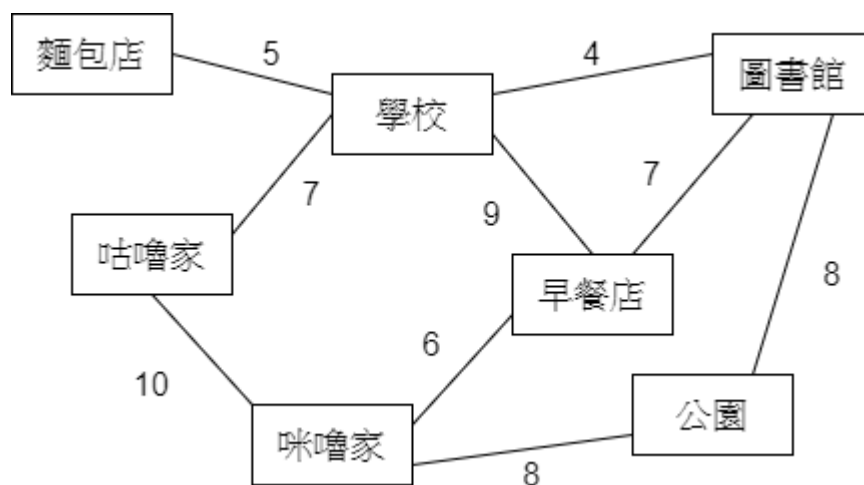
- 參考答案：
  - 3個



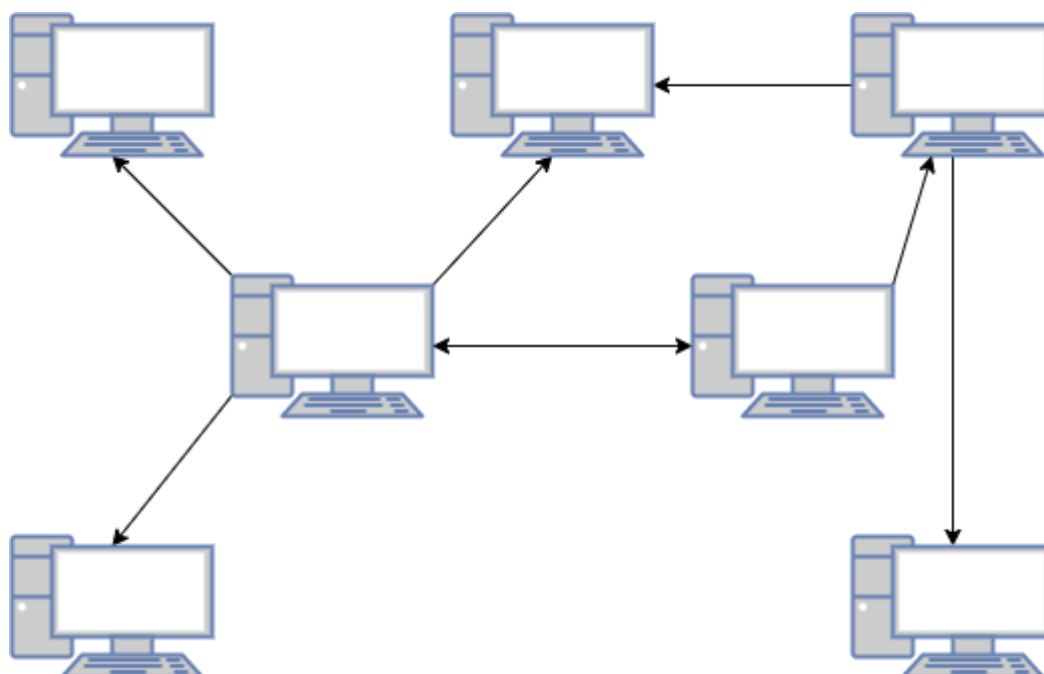
2. 下圖為咕嚕走路要花的時間，根據該圖回答下列問題。

1. 咪嚕從家裡出發要去學校上課，打算先去早餐店買早餐，再從早餐店直接到學校。請問他從家裡到學校一共要走多久？
2. 放學下課了，咪嚕跟咕嚕打算先去麵包店買面包，再順路一起回家。請問他一共走了多久才到家？

3. 咪嚕打算要去圖書館借書，他應該要怎麼走，才能夠花最少的時間到達圖書館？請寫出路徑與花費時間。



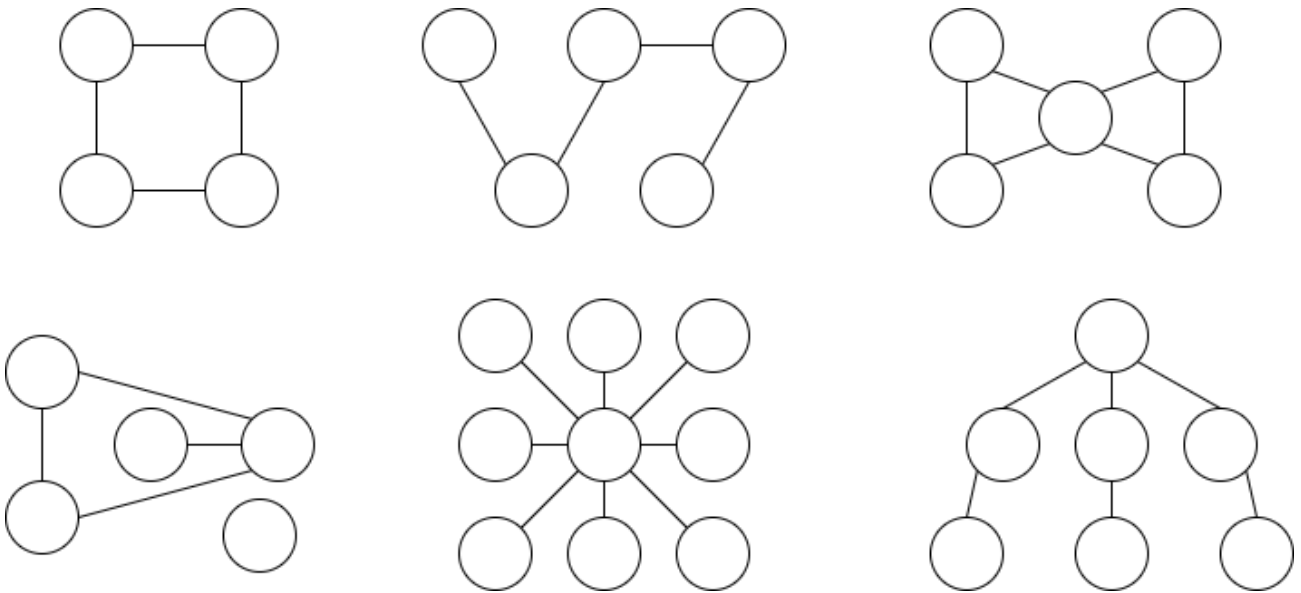
3. 因為網路科技的普及，讓資訊安全重要性也隨之提高，在新聞上常常看到有公司因為員工操作不當，而讓駭客入侵，造成巨大損失。現在這裡有一張圖，該圖簡單的表示出某公司內部網路電腦間的通訊關係。想想看，如果要選擇兩台電腦提升安全防護，應該要選擇哪兩台電腦，請圈選起來並說明原因。



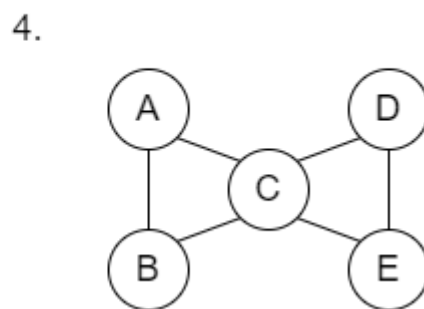
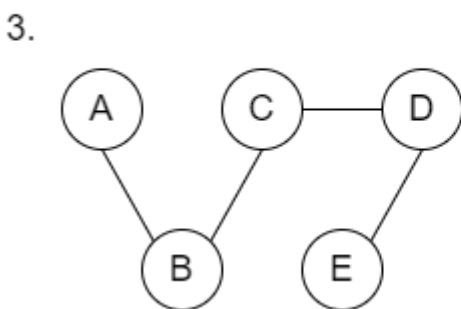
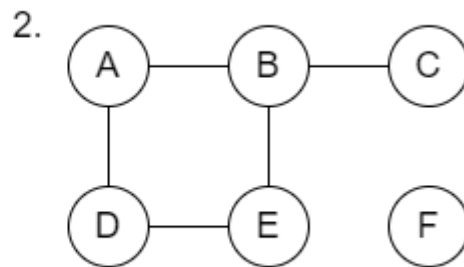
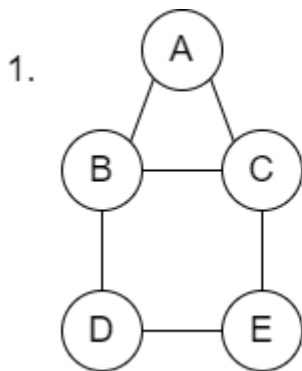
4. 一筆畫問題，是要判斷能不能一次一筆畫畫完某個圖，且每一條邊只能畫一次，不能重複。

1. 下列哪些圖可以用一筆畫完成，請圈選出來。





2. 依據下圖判斷，有哪些點可以一筆畫完成，且起點與終點相同，請寫出一條路徑來說明。



## 5.2 圖的表示

**相鄰矩陣**是圖常用的表示法，將圖上的點依序標示編號，用一個**二維陣列**來記錄點與點間連接的資訊。例如：要表示有  $n$  個點的圖時，可用一個  $n \times n$  的二維陣列  $A$  做為相鄰矩

陣，元素  $A[i][j]$  表示  $i$  點與  $j$  點間的資訊。

以圖 5-9-1 為例子，有 5 個點，可用一個  $5 \times 5$  的二維陣列表示。因為 (A, B) 邊存在，所以第 A 列第 B 行之值為 1；(A, C) 邊不存在，第 A 列第 C 行之值為 0。依此類推，可以得到表示圖的相鄰矩陣。

在無向圖中，(i, j) 邊和 (j, i) 邊相同，即  $A[i][j] = A[j][i]$ ，因此其相鄰矩陣為對稱矩陣。且無向圖的點都一定不會有指向自己的邊，因此其相鄰對角線元素值都為 0。(圖 5-9-1)

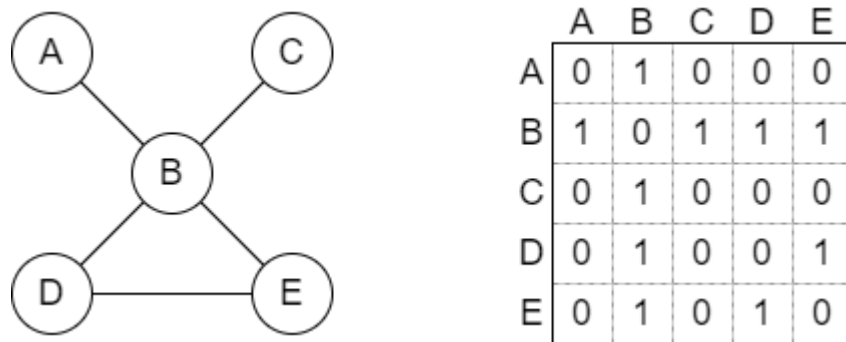


圖 5-9-1 無向圖的相鄰矩陣

在有向圖中，(i, j) 邊和 (j, i) 邊不相同，可能  $A[i][j] \neq A[j][i]$ ，因此其相鄰矩陣不一定為對稱矩陣。且有向圖的點可以有指向自己的邊，因此其相鄰對角線元素值不一定都為 0。(圖 5-9-2)

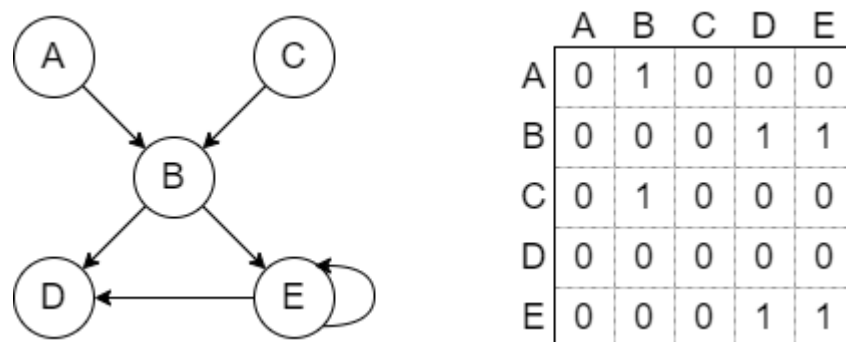


圖 5-9-2 有向圖的相鄰矩陣

如果圖的邊有標記權重，對應的元素值就為權重值；若無權重值，則可以使用 0 來表示。(圖 5-9-3)

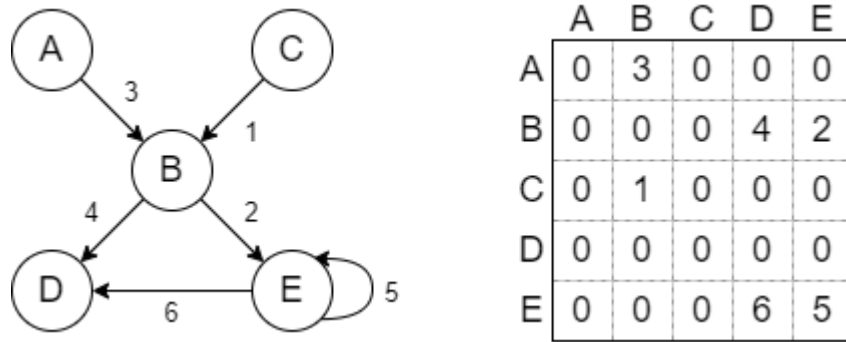


圖 5-9-3 有權重之有向圖的相鄰矩陣

## 練習

## 5.3 圖的搜尋

圖的搜尋是指循著圖的邊，拜訪某一個點，且每一個點只拜訪一次。圖的搜尋演算法有**深度優先搜尋法**、**廣度優先搜尋法**兩種。

### 一、不撞南牆不回頭—深度優先搜尋法

**深度優先搜尋法**是從圖的某一個點開始拜訪，接著拜訪與此點相鄰，且尚未拜訪的其中一個點（習慣上會先從序號小的優先拜訪），再從該點繼續深度優先搜尋下去。

演算法：

1. 先從  $s$  點開始拜訪。
2. 拜訪與  $s$  相鄰，且尚未拜訪的其中一個點  $t$ 。
3. 從  $t$  點繼續進行深度優先搜尋，直到所有的點都被拜訪過。

例如圖 5-10，進行深度優先搜尋的過程如下：

1. 先從 A 點開始拜訪。(圖 A)
2. 拜訪與 A 相鄰，且尚未拜訪的點中序號最小的點 B。(圖 B)
3. 從 B 點繼續深度優先搜尋。拜訪與 B 相鄰，且尚未拜訪的點中序號最小的點 C。(圖 C)

4. 從 C 點繼續深度優先搜尋。拜訪與 C 相鄰，且尚未拜訪的點中序號最小的點 E。(圖 D)
5. 從 E 點繼續深度優先搜尋。拜訪與 E 相鄰，且尚未拜訪的點中序號最小的點 D。(圖 E)
6. 所有點都被拜訪過，深度優先搜尋搜尋結束，其搜尋結果順序為 A → B → C → E → D。

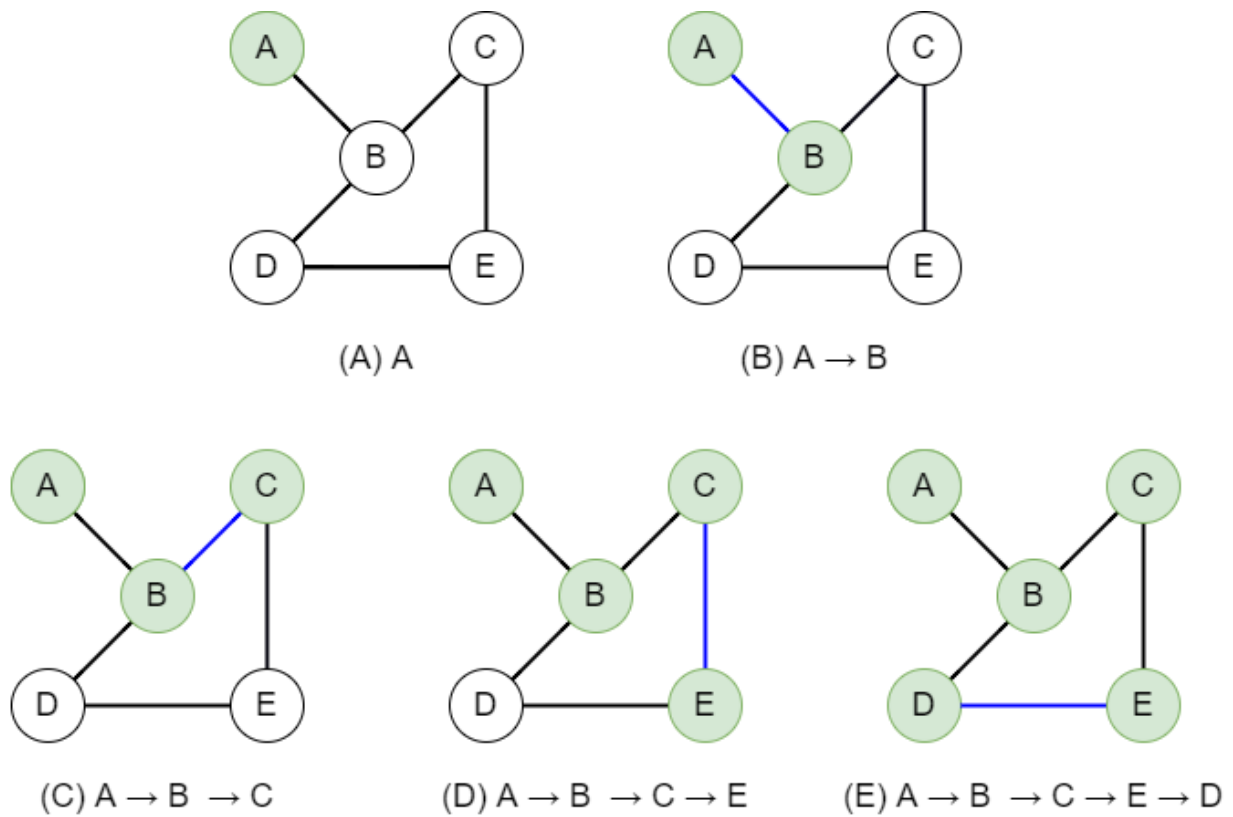
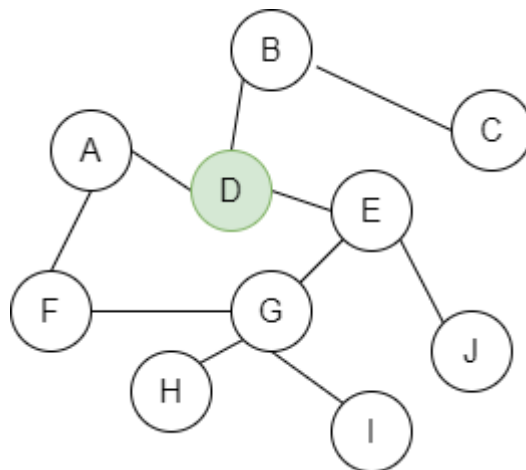


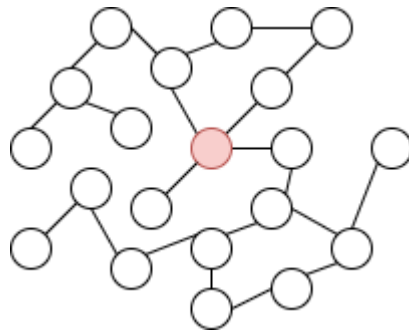
圖 5-10 深度優先搜尋

## 練習

1. 根據下圖，與 D 點關係最遠的點為哪些點？

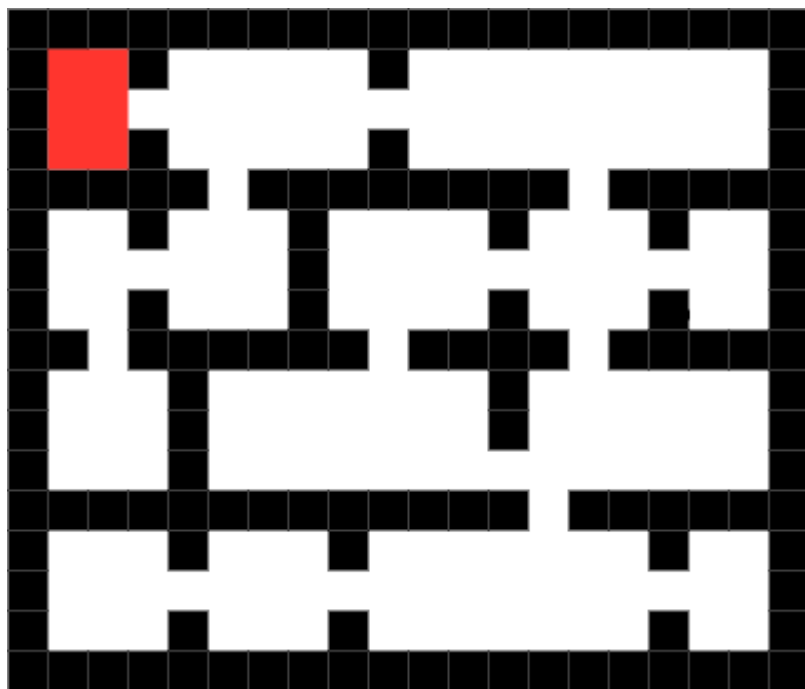


2. 下圖為某班級學生間的朋友關係圖，每個人收到訊息就會傳遞給自己的朋友，傳遞的過程平均要過 10 分鐘。若有一則消息，要從紅色的成員開始傳遞消息，請問要過多久全班的人才會知道這個消息？

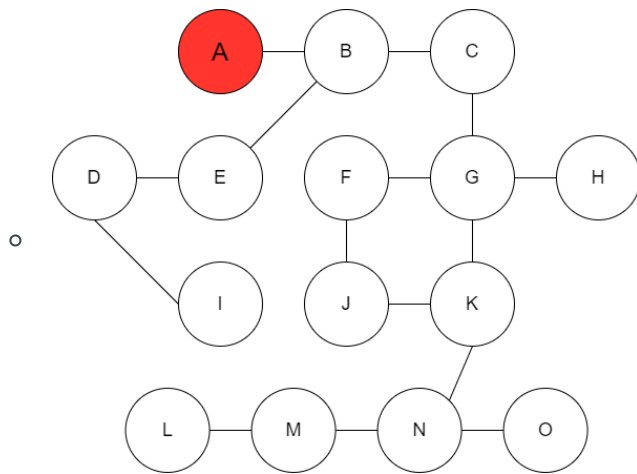


3. 倉太是一隻可愛的花栗鼠，倉太的主人是一個很厲害的科學家，因此做了一個會隨機重製的迷宮盒子給倉太玩，在迷宮裡面會撒上一些堅果，倉太很聰明但是又非常懶惰又愛吃，所以他每次都想要以最快速度，把迷宮的路徑走過一次，把全部的堅果吃掉。現在迷宮重製成如下圖，倉太從紅色的地方開始走訪迷宮，依照此圖回答下列問題。

1. 若要用「圖」來描述此迷宮，圖的點和邊要如何定義？
2. 請描繪出此迷宮的圖形。
3. 想想看，倉太可以使用哪種演算法？



- ans:
  - 每一個房間設為一個點，每個房間可以相通則用邊表示。



o DFS

## 二、層層深入—廣度優先搜尋法

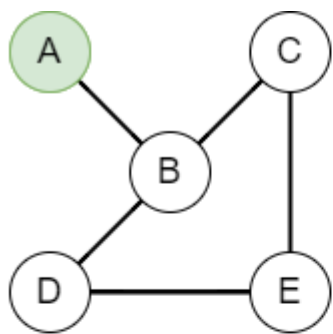
**廣度優先搜尋法**是從圖的某一個點開始拜訪，接著拜訪與此點相鄰，且尚未拜訪的所有的點（習慣上會先從序號小的優先拜訪），再從這些相鄰點依序繼續廣度優先搜尋下去。

演算法：

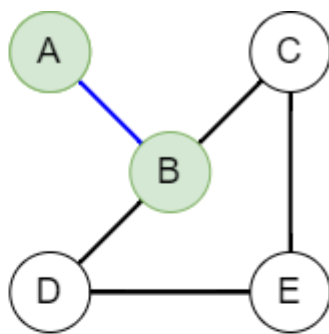
1. 先從 s 點開始拜訪。
2. 依序拜訪與 s 點相鄰，且尚未拜訪的所有的點 t1、t2、t3、.....，
3. 依序從 t1、t2、t3、..... 繼續進行廣度優先搜尋，直到所有節點都被拜訪過。

例如圖 5-11，進行廣度優先搜尋的過程如下：

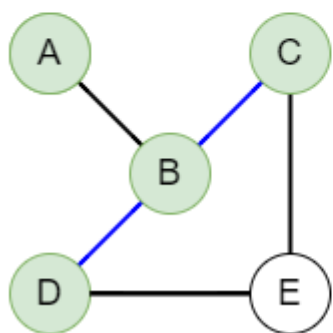
1. 先從 A 點開始拜訪。(圖 A)
2. 依序拜訪與 A 相鄰，且尚未拜訪過的所有點 B。(圖 B)
3. 從 B 繼續進行廣度優先搜尋，依序拜訪未被拜訪過的所有點相鄰 C、D。(圖 C)
4. 從 C 繼續進行廣度優先搜尋，依序拜訪未被拜訪過的所有點相鄰 E。(圖 D)
5. 所有點都被拜訪過，廣度優先搜尋搜尋結束，其搜尋結果順序為 A → B → C → D → E。



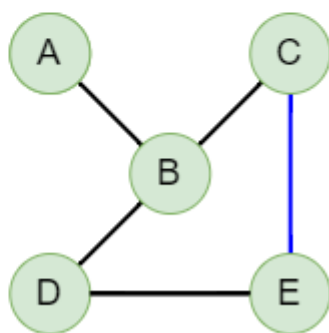
(A) A



(B)  $A \rightarrow B$



(C)  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$



(D)  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$

圖 5-11 廣度優先搜尋