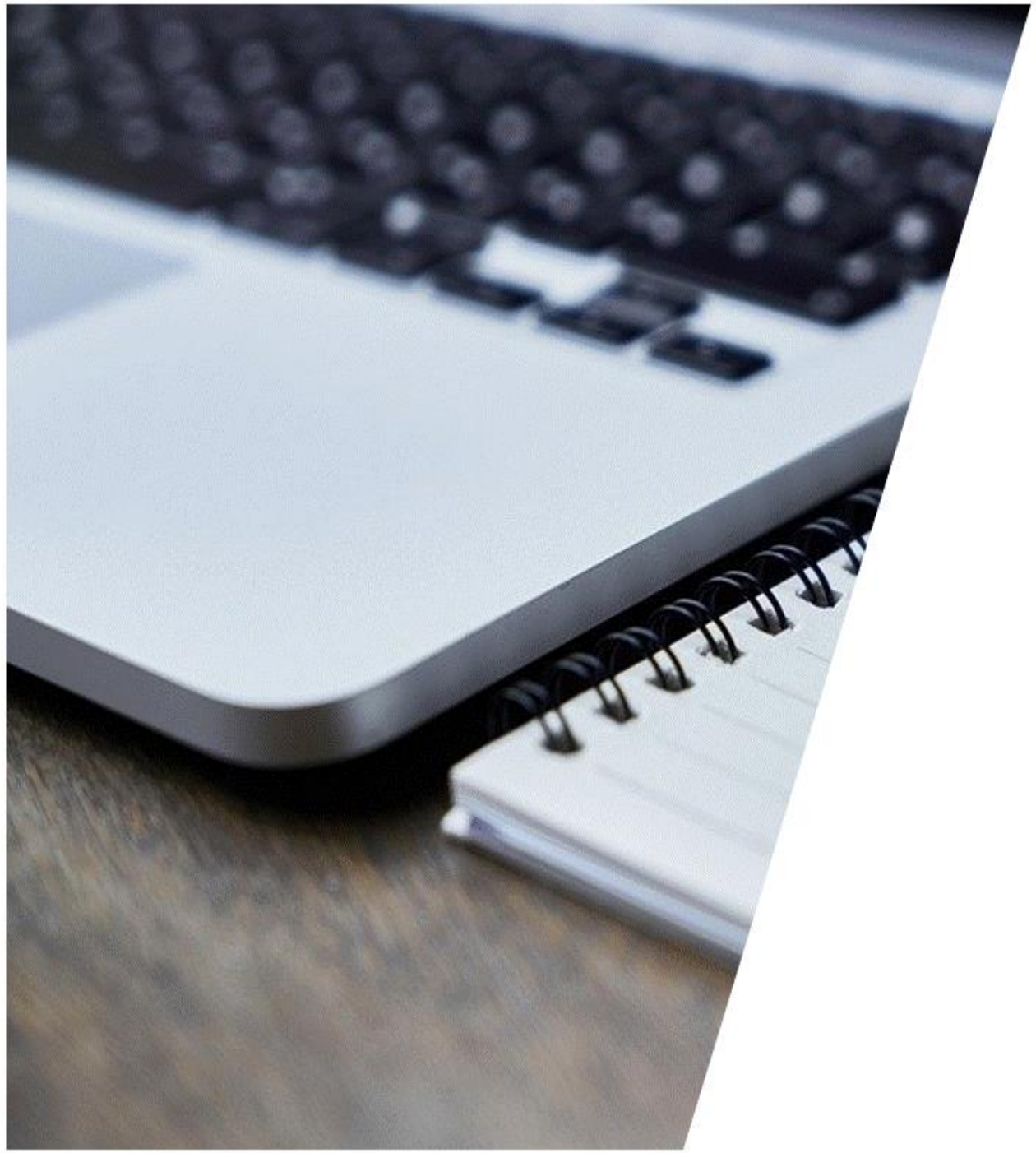


# C 語言

# 位元運算子

# 背景知識

# 構成資料的基礎是位元(bit)

- 所有的資料在電腦的內部均是以一連串的位元(bit)來加以表示，每一個位元(bit)的值可為0或1
- 在大部分的系統裡，8個位元會構成一個位元組(byte)

延伸閱讀：來點科普

# 看一下英文字元與二進位的對照-ASCII

- 在大部分的系統裡，8個位元會構成一個位元組(byte)
- 1個byte是字元型別(char)變數的標準儲存單位，右圖是ASCII定義的文字資料的編碼表
  - 以文字A來說，A的二進位碼是01000001，以資料量來說是1個byte，也就是8個bit
- 其他的資料型態(整數或浮點數)則會存放較多的位元組

ASCII可顯示字元（共95個）

| 二進位 | 十進位 | 十六進位 | 圖形 |
|---|---|---|---|
| 0100 0000 | 64 | 40 | @ |
| 0100 0001 | 65 | 41 | A |
| 0100 0010 | 66 | 42 | B |
| 0100 0011 | 67 | 43 | C |
| 0100 0100 | 68 | 44 | D |
| 0100 0101 | 69 | 45 | E |
| 0100 0110 | 70 | 46 | F |
| 0100 0111 | 71 | 47 | G |
| 0100 1000 | 72 | 48 | H |
| 0100 1001 | 73 | 49 | I |
| 0100 1010 | 74 | 4A | J |
| 0100 1011 | 75 | 4B | K |
| 0100 1100 | 76 | 4C | L |
| 0100 1101 | 77 | 4D | M |
| 0100 1110 | 78 | 4E | N |
| 0100 1111 | 79 | 4F | O |
| 0101 0000 | 80 | 50 | P |
| 0101 0001 | 81 | 51 | Q |
| 0101 0010 | 82 | 52 | R |
| 0101 0011 | 83 | 53 | S |
| 0101 0100 | 84 | 54 | T |
| 0101 0101 | 85 | 55 | U |

以上截圖自(https://zh.wikipedia.org/wiki/ASCII)

# 電腦儲存資料的單位：位元(bit)與位元組(byte)

- 位元：binary digit，簡稱bit
  - 電腦記憶體儲存的最小單位
  - 一個位元只能表達兩種狀態：0 與 1

- 位元組：byte
  - 由八個 bit 所組成，1 byte = 8bits
  - 1 byte 可以表達 $2^8$ = 256 種狀態

# 電腦內部如何儲存人類慣用的十進位的數字資料

- 所有十進位資料都必須轉換為二進位格式才能在電腦中儲存。
- 下圖是十進位與二進位的對照表，二進位是逢2進位的計算結果
- 以十進位的16為例，10000是其2進位的表示結果

| 十進位 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 二進位 | 0 | 1 | 10 | 11 | 100 | 101 | 110 | 111 | 1000 | 1001 | 1010 | 1011 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 | 10000 |

# 其他進位制的介紹

- 記數系統，表示數值的方式

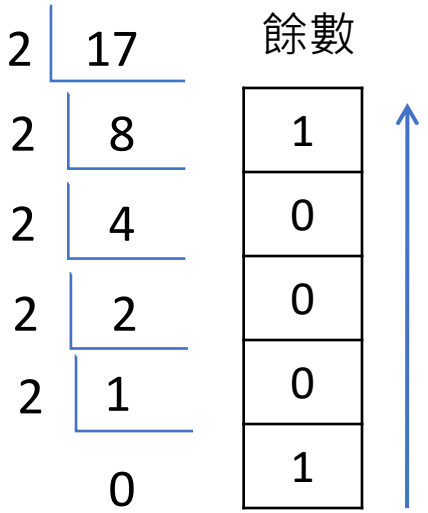
| | 底/基數 | 數字範圍 | 表示法 |
|---|---|---|---|
| 十進位<br>( 最常使用的進制系統 ) | 10 | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 | 代表十進位數的 11：$11_{10}$ |
| 二進位<br>( 電腦內部資料儲存方式 ) | 2 | 0 1 | 代表二進位數的 11：$11_{2}$ |
| 八進位 | 8 | 0 1 2 3 4 5 6 7 | 代表八進位數的 11：$11_{8}$ |
| 十六進位 | 16 | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E | 代表十六進位數的 11：$11_{16}$ |

# 進位制對照表

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 十進位 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 二進位 | 0 | 1 | 10 | 11 | 100 | 101 | 110 | 111 | 1000 | 1001 | 1010 | 1011 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 | 10000 |
| 八進位 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 20 |
| 十六進位 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | A | B | C | D | E | F | 10 |

# 進位制轉換的計算方法

將十進位制 17 轉成二進位制




$17_{10} = 10001_2$

將二進位制 101011 轉成十進位制

| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|

$101011_2 = 1*2^5 + 0*2^4 + 1*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 1*2^0$

$= 32 + 8 + 2 + 1$

$= 43_{10}$

# 除2進位之外，為何特別提及8進位與16進位

- 提供一種方便的方式來表示二進位數字
- 八進位數字系統中，每個數字都可以表示為3位二進位數字，例如，二進位數字101可以表示為八進位數字5；十六進位每個數字都可以表示為4位二進位數字，例如，二進位數字1010可以表示為十六進位數字A。
- 過去，許多計算機硬體都是以8位元組為基礎的，因此，8進位方便操作，目前使用已經大幅減少
- 目前，16進位數字系統經常用於表示記憶體地址和數據。由於一個位元組（八位元）可以表示為兩個十六進位數字，因此十六進位數字常用於描述位元組序列（例如，檔案內容或網路傳輸數據）。此外，十六進位數字還常用於編程和調試，因為它們比二進位數字更易於讀取和比較。

# 運算子的種類

- 算術運算子：+ - * / %
- 邏輯運算子：&& || !
- 位元運算子：
  - 一個整數資料型態被視為一個操作對象，會將十進位轉為二進位，然後對每一個位元(bit)進行操作

| 十進位 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 二進位 | 0 | 1 | 10 | 11 | 100 | 101 | 110 | 111 | 1000 | 1001 | 1010 | 1011 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 | 10000 |

# 位元運算的操作

# 對整數資料型態的操作

- 對位元（即0和1）進行運算的過程。
- 電腦以1個byte來放置字元資料型態
- 電腦對於整數資料型態空間的配置又是如何?
  - 除了常用的int，還有short 與 long等資料型別，分別有不同的位元組長度
  - int, short與long都是有符號整數，能表示正負數，也可以特別聲明unsigned(無符號整數)

# 整數資料型態

- 每個整數變數， 會保留最左邊的一個位元來記錄數值的正負狀態，1 表示負數，0表示正數。
- 指定 unsigned 的整數變數就不需要保留最左邊的一個位元，因此可表示的數值範圍會比較多。
- int / long 等占用的位元組長度會依照執行的系統環境而有差異。

| | 系統環境 | 位元組長度 | 數值範圍 |
|---|---|---|---|
| int | 16位元系統 | 2 bytes | -32768 to32767 |
| int | 32位元系統 | 4 bytes | -2,147,483,648 to 2,147,483,647 |
| short | | 2 bytes | -32,768 to 32,767 |
| long | 32位元系統 | 4 bytes | -2,147,483,648 to 2,147,483,647 |
| long | 64位元系統 | 8 bytes | $-(2^{63})$ to $(2^{63})-1$ |

# 操作位元運算的方法有6個：位元運算子

| 運算子 | 運算 | 意義 | 運算過程說明 |
| --- | --- | --- | --- |
| & | AND | 且 | 對兩個二進位數字進行逐位比較：<br>只有當兩個位元都為1時結果為1，否則為0。 |
| \| | OR | 或 | 對兩個二進位數字進行逐位比較：<br>只有當兩個位元都為0時結果為0，否則為1。 |
| ^ | XOR | 互斥 | 對兩個二進位數字進行逐位比較：<br>只有當兩個位元不同時結果為1，否則為0 |
| ~ | NOT | 反 | 將一個二進位數字：<br>每個位元都取反（即0變成1，1變成0） |
| >> | Right Shift | 右移 | 將一個二進位數字：<br>向左移動指定的位數，右邊補0 |
| << | Left Shift | 左移 | 將一個二進位數字：<br>向右移動指定的位數，左邊補符號位（對於帶符號數字），或者補0（對於無符號數字） |

# 位元運算子 &（AND）

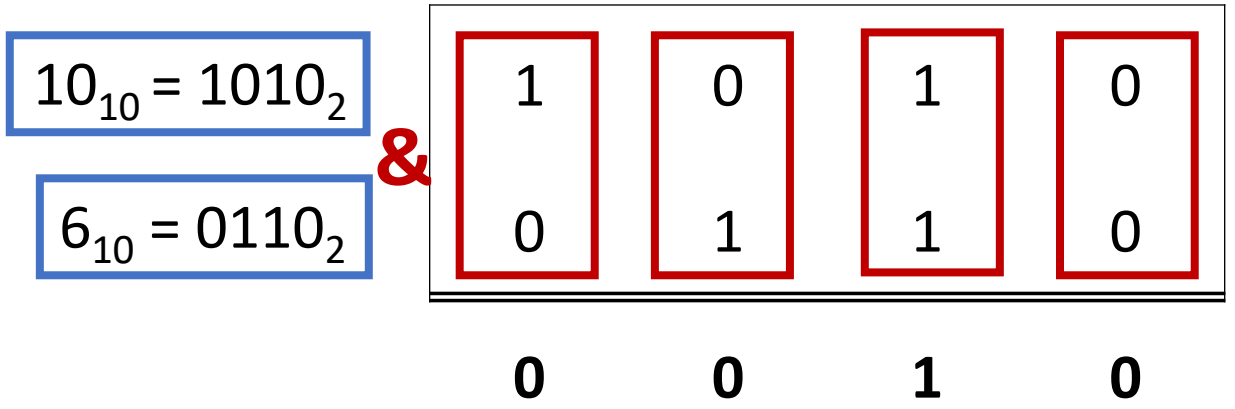
- 任一位元 n 與 0 的 & 運算等於 0。
- 任一位元n 與 1 的 & 運算等於 n。

- 當兩個 bit 都是 1 時，& 運算才會得到
- 利用與 0 的 & 運算可以將某位元設成 0。
- 可用來判斷位元是 1 還是 0 。

| a | b | a & b |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

# & ( AND )

```c
#include <stdio.h>

int main(){
    int a = 10;
    int b = 6;

    printf("%d & %d = %d", a, b, a&b);
    return 0;
}
```




$1010_2$ & $0110_2 = 0010_2$

$10_{10}$ & $6_{10} = 2_{10}$

# 位元運算子 |（OR）

- 任一位元n 與 0 的 | 運算等於 n。
- 任一位元n 與 1 的 | 運算等於 1。

- 當兩個 bit 都是 1 時，& 運算才會得到 1
- 利用與 1 的 | 運算可以將某位元設成 1。

| a | b | a \| b |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

# | ( OR )

```c
#include <stdio.h>

int main(){
    int a = 10;
    int b = 6;

    printf("%d | %d = %d", a, b, a|b);
    return 0;
}
```

$10_{10} = 1010_2$

$6_{10} = 0110_2$

|
| 1 | 0 | 1 | 0 |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| **1** | **1** | **1** | **0** |

**$1010_2$ | $0110_2 = 1110_2$**

**$10_{10}$ & $6_{10} = 14_{10}$**

# 位元運算子 ^（XOR）

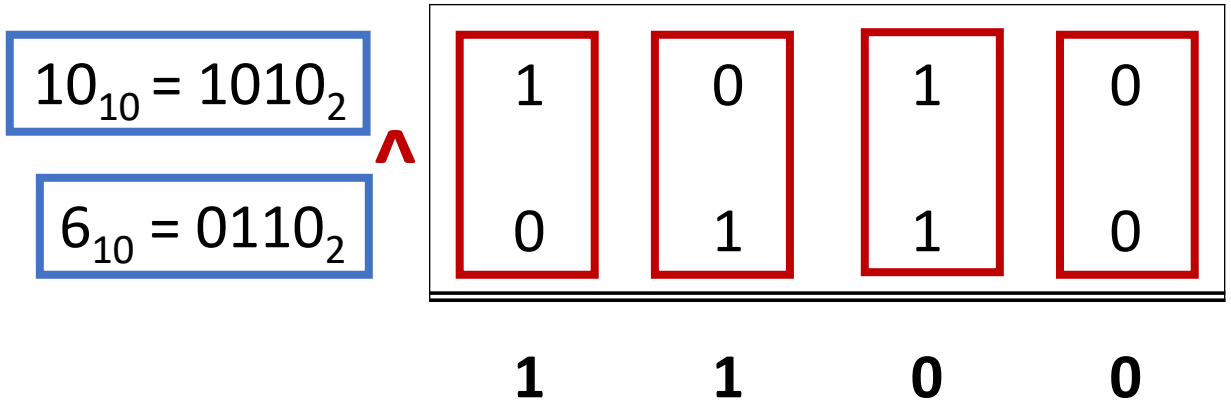
- 任一位元 n 與 0 的 ^ 運算等於 n。
- 任一位元n 與 1 的 ^ 運算等於 not n。

- 當兩個 bit 不一樣時，^ 運算才會得到 1 。
- 利用與 1 的 ^ 運算可以將某位元反相，0⇔1 。
- 可用來判斷兩個位元是否相等。

| a | b | a ^ b |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

# ^ ( XOR )

```c
#include <stdio.h>

int main(){
    int a = 10;
    int b = 6;

    printf("%d ^ %d = %d", a, b, a^b);
    return 0;
}
```




$1010_2$ ^ $0110_2 = 1100_2$

$10_{10}$ ^ $6_{10} = 12_{10}$

# 位元運算子 ~（NOT）

- 將位元反相，0⇔1 。

| a | ~a |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

# 位元運算子 << ( 左移 )

- 將變數內的所有位元向左移動 n 個位元，寫法：a << n。

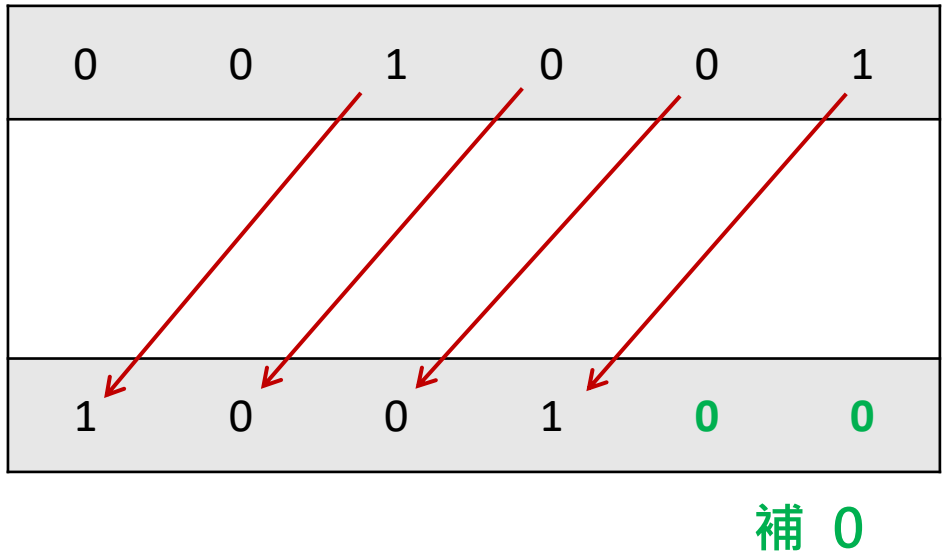
例如：

$9_{10} << 2$

$\Rightarrow 1001_2 << 2$

$\Rightarrow 100100_2$

$\Rightarrow 36_{10}$



# 位元運算子 << ( 左移 )

- 移動後，若左邊位元超出變數占用的空間範圍時，超出的位元就會消失，低位元會補 0 。

例如：

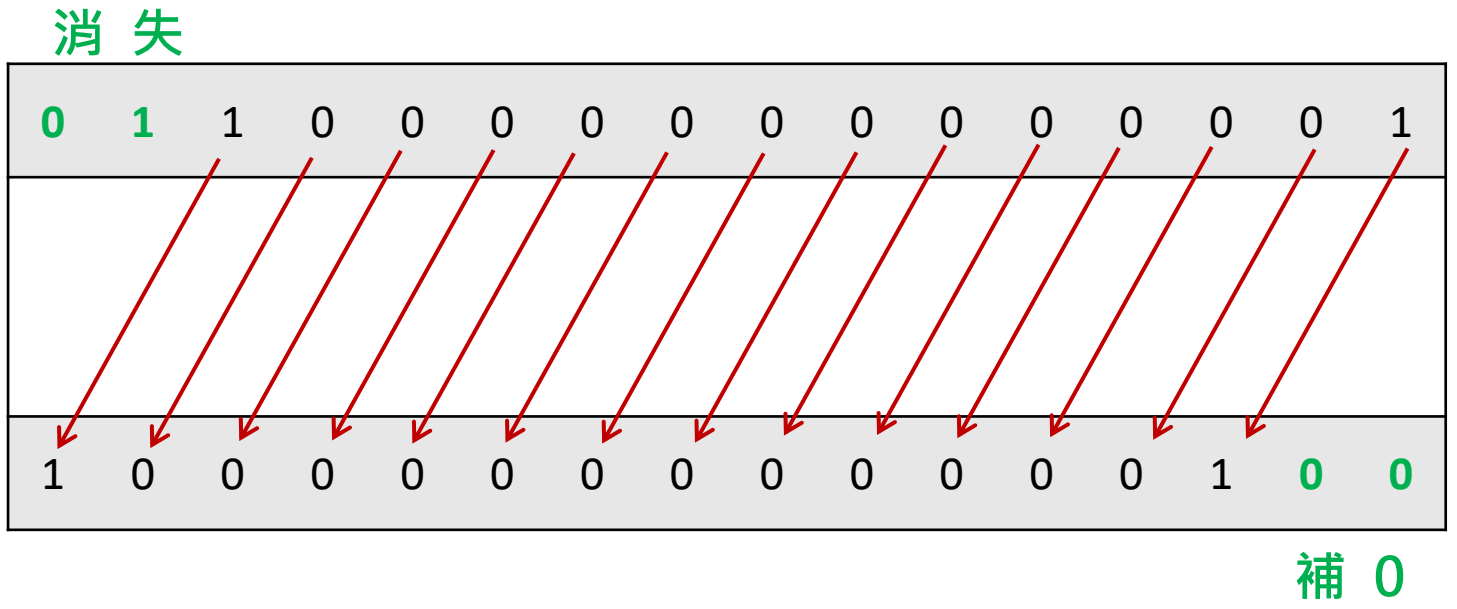
unsigned short a= 24577

$24577_{10} << 2$

$\Rightarrow 1100000000000001_2 << 2$

$\Rightarrow 1000000000000100_2$

$\Rightarrow 32772_{10}$



# 位元運算子 >> ( 右移 )

- 將變數內的所有位元向右移動 n 個位元，寫法：a >> n。

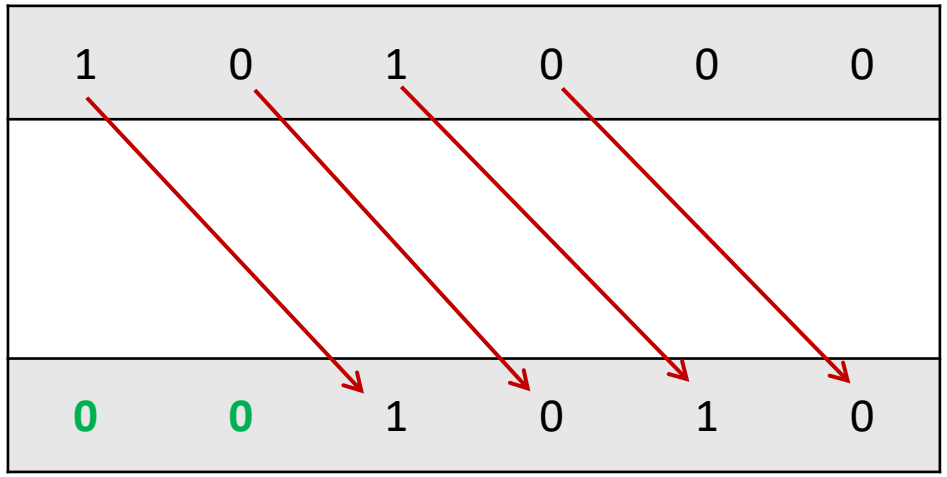
例如：

$40_{10} >> 2$

$\Rightarrow 10100_2 << 2$

$\Rightarrow 1010_2$

$\Rightarrow 10_{10}$



# 位元運算子 >>（右移）

- 移動後，低位元會消失，高位元會補 0 。

例如：

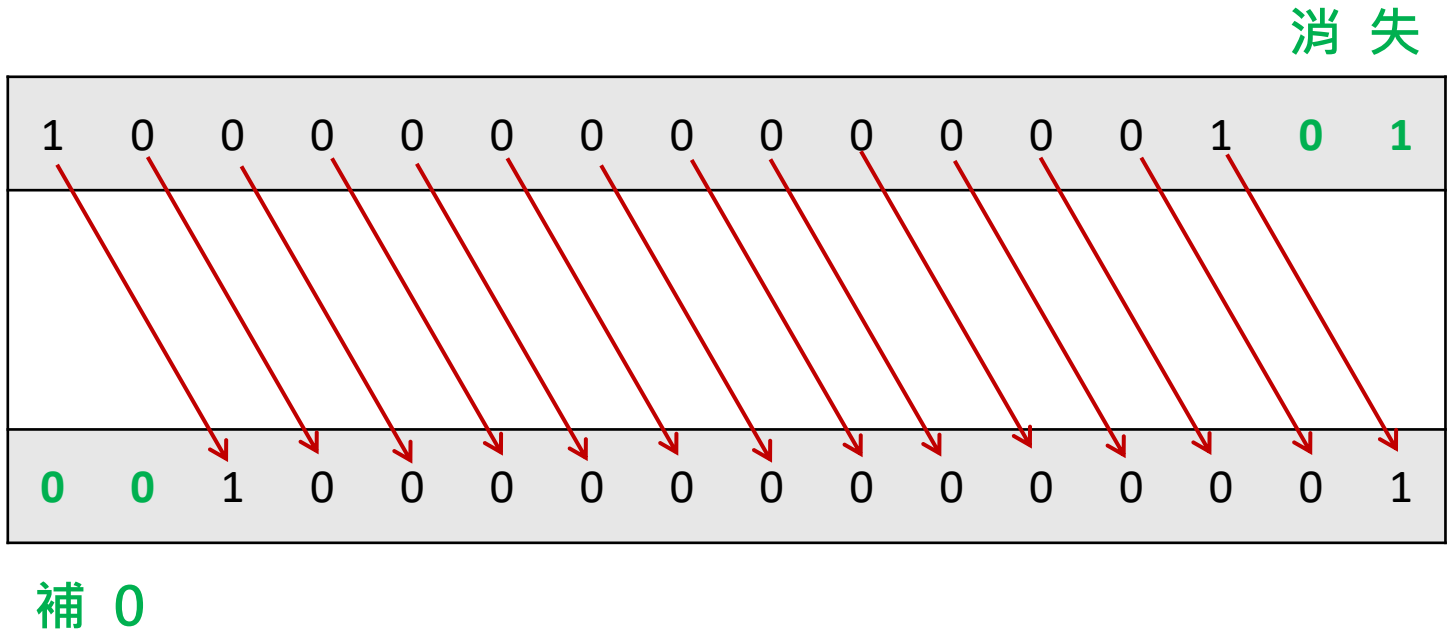
unsigned short a= 32773

$32773_{10} >> 2$

$\Rightarrow 1000000000000101_2 >> 2$

$\Rightarrow 1000000000001_2$

$\Rightarrow 8193_{10}$




註解unsigned short ：

- C語言中的資料類型之一，用於表示一個16位元無符號整數。它的取值範圍是0到65535
- “unsigned”表示這個類型的變量不包含符號，即它只能表示非負數。“short”表示這個類型的變量占用的內存空間比整型（int）變量少，通常為2個字元。

# << ( 左移 ) 與 >> ( 右移 ) 的練習題

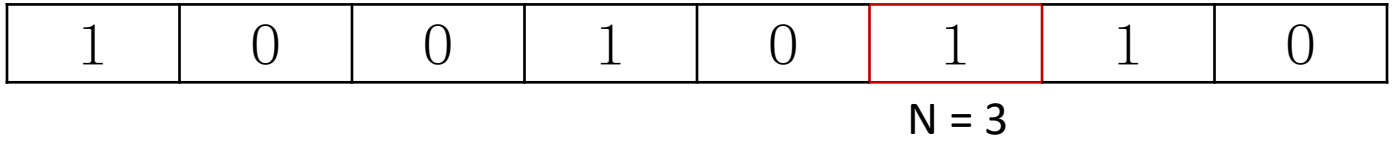
```c
#include <stdio.h>

int main(){
    int a = 10;
    int b = 20;

    printf("%d >> 2 = %d\n", a, a >> 2); // 10 >> 2 = 2
    printf("%d << 2 = %d\n", a, a << 2); // 10 << 2 = 40
    printf("%d >> 4 = %d\n", b, b >> 4); // 20 >> 4 = 1
    printf("%d << 4 = %d\n", b, b << 4); // 20 << 4 = 320
}
```

# 位元運算應用實例

# 問題1：二進制數值第 N 個位元值？

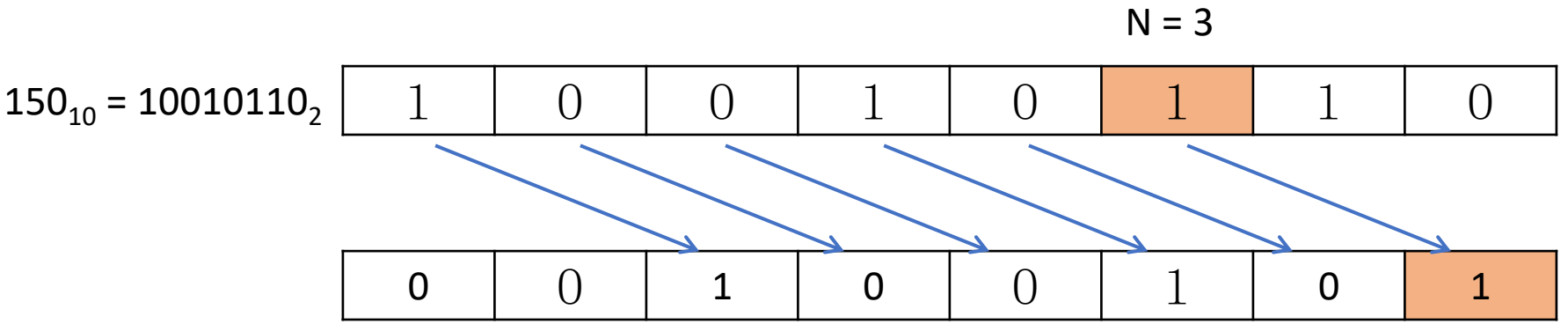
問題：$150_{10}$ 的二進制數值右邊數來第 N 個位元是 1 還是 0？

$150_{10} = 10010110_2$



# $150_{10}$的二進制第 N 個位元值？

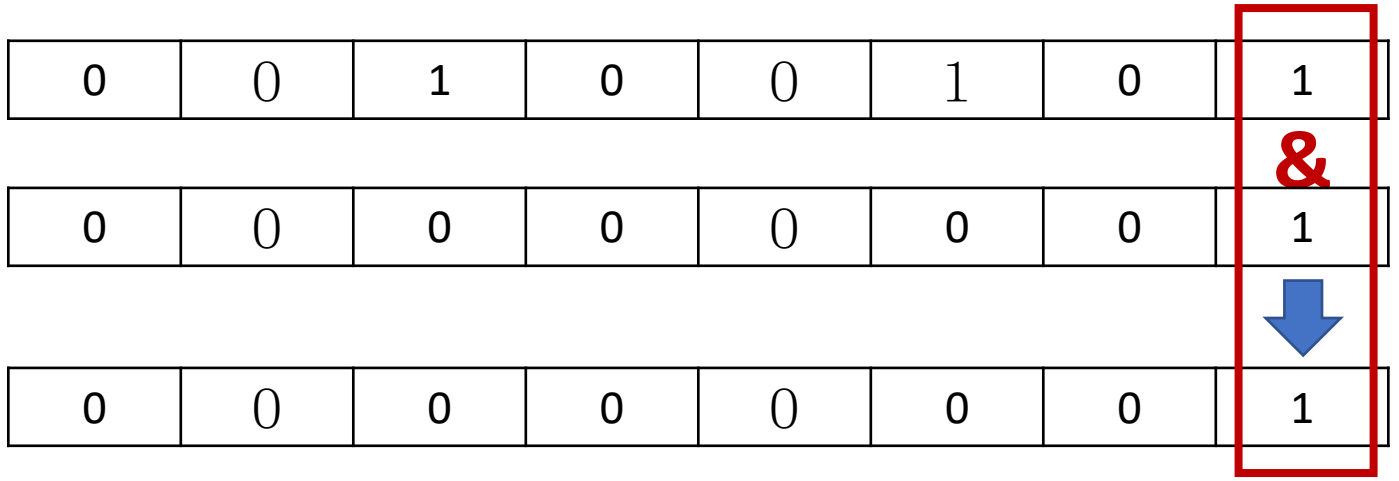
第一步：先右移 2 個位元




```
( a >> (3-1) )
```

# $150_{10}$的二進制第 N 個位元值？

第二步：跟 1 進行 AND 運算，就可判斷位元是 1 還是 0 。




```
( a >> (N-1) ) & 1
```

# 解決：二進制數值第 N 個位元值？

```c
#include <stdio.h>

int main(){
    unsigned int a = 150;
    int i = 3;
    unsigned int x = ( a >> (i-1) ) & 1;
    // 取出 a 第 i 個位置的 bit 值

    printf("%u\n", x);
    return 0;
}
```

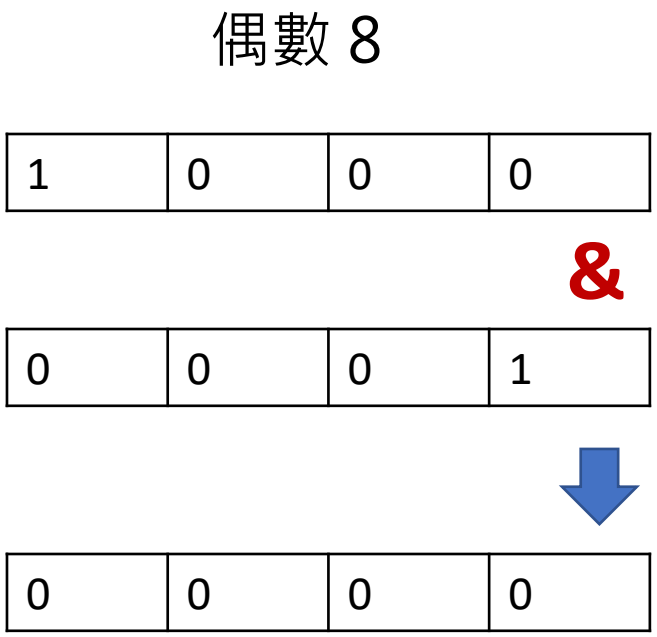
# 問題2：2 的 N 次方是多少？

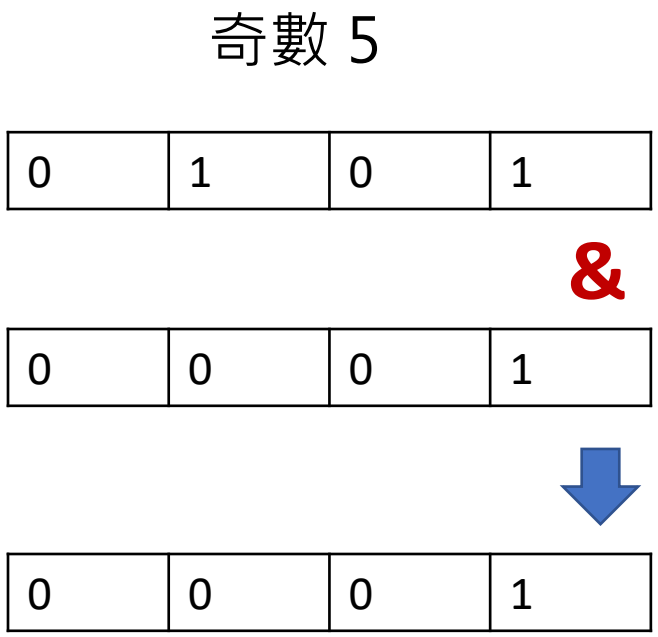
| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^0$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1<<0 |
| $2^1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1<<1 |
| $2^2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1<<2 |
| $2^3$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1<<3 |
| $2^4$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1<<4 |

# 解决：2 的 N 次方是多少？

```c
#include <stdio.h>

int main(){
    int n ;

    scanf("%d", &n);
    printf("2 的 %d 次方 => %d\n", n, 2<<(n-1));
    return 0;
}
```

# 問題3：整數 N 是偶數嗎？



# 解決：整數 N 是偶數嗎？

```c
#include <stdio.h>

int main(){
    int n ;
    scanf("%d", &n);
    if (n & 1) {
        printf("%d 是奇數\n", n);
    } else {
        printf("%d 是偶數\n", n);
    }
    return 0;
}
```

# 位元運算的應用範圍

在計算機科學和電子工程等領域中，位元運算是一個非常重要的技術，位元遮罩、位元清除、位元翻轉、位元交換等等，可以用於許多應用，例如數據壓縮、加密解密、圖形處理、控制系統等。

# 以上只討論正數，
# 負數在二進位怎麼表示?

# 對整數資料型態的操作

- 對位元（即0和1）進行運算的過程。
- 電腦以1個byte來放置字元資料型態
- 電腦對於整數資料型態空間的配置又是如何?
  - 除了常用的int，還有short 與 long等資料型別，分別有不同的位元組長度
  - int, short與long都是有符號整數，能表示正負數，也可以特別聲明unsigned(無符號整數)

# 整數資料型態

- 每個整數變數， 會保留最左邊的一個位元來記錄數值的正負狀態，1 表示負數，0表示正數。
- 指定 unsigned 的整數變數就不需要保留最左邊的一個位元，因此可表示的數值範圍會比較多。
- int / long 等占用的位元組長度會依照執行的系統環境而有差異。

| | 系統環境 | 位元組長度 | 數值範圍 |
|---|---|---|---|
| int | 16位元系統 | 2 bytes | -32768 to32767 |
| int | 32位元系統 | 4 bytes | -2,147,483,648 to 2,147,483,647 |
| short | | 2 bytes | -32,768 to 32,767 |
| long | 32位元系統 | 4 bytes | -2,147,483,648 to 2,147,483,647 |
| long | 64位元系統 | 8 bytes | $-(2^{63})$ to $(2^{63})-1$ |

# 以unsigned short int來說明無正負符號的整數

- 宣告方式 unsigned short int x;
- unsigned short int 以16個位元來表示正整數

| 二進位 | 十進位 |
|---|---|
| 0000000000000000 | 0 |
| 0000000000000001 | 1 |
| 0000000000000010 | 2 |
| 0000000000000011 | 3 |
| 0000000000000100 | 4 |
| … | … |
| 1111111111111110 | 65534 |
| 1111111111111111 | 65535 |

# 以short int來說明無正負符號的整數

- 宣告方式 unsigned short int x;
- unsigned short int 以16個位元來表示正整數

| 二進位 | 十進位 |
|---|---|
| 0000000000000000 | 0 |
| 0000000000000001 | 1 |
| 0000000000000010 | 2 |
| 0000000000000011 | 3 |
| 0000000000000100 | 4 |
| … | … |
| 1111111111111110 | 65534 |
| 1111111111111111 | 65535 |

# 二進位該如何表示一負數?

# 最簡單的辦法-
# 數字的最左邊留用一個數字來表示正負數

- 因為以上的原則，演化出三種負數表示法
  - 符號表示法
  - 1’s 補數法
  - 2’s 補數法
- 現在的電腦全都是採用「2’s 補數法」來表示負數

# 以short int來說明有正負符號的整數

- 宣告方式 short int x;
- short int 的最左位元表示

| 二進位 | 十進位 | 二進位 | 十進位 |
|---|---|---|---|
| 0000000000000000 | 0 | 1000000000000000 | -0 |
| 0000000000000001 | 1 | 1000000000000001 | -1 |
| 0000000000000010 | 2 | 1000000000000010 | -2 |
| 0000000000000011 | 3 | 1000000000000011 | -3 |
| 0000000000000100 | 4 | 1000000000000100 | -4 |
| … | … | … | … |
| 0111111111111110 | 32766 | 1111111111111110 | -32766 |
| 0111111111111111 | 32767 | 1111111111111111 | -32767 |

這樣表示的話，會發生什麼樣的問題呢？
「0」不就有「+ 0」和「- 0」 兩種表示了嗎？如果程式設計人員稍微粗心一點，就很容易發生錯誤
要解決這問題有個辦法，就是取「補數」。

# 負數表示法的發展-
# 1’s 補數法

- 以4個bit為例
- 有號1補數表示法在表示正數時，跟基本正數的二進位表示法一樣。
- 但在表示負數時，就是把基本正數二進位表示法整個取1補數，記得連第一位元的0都要變1。

1的補數， 0 如果是「0000」、取補數 -0 就會是「1111」，還是沒有解決 0 有 +0 和 -0 兩種結果的問題
為了改善，所以我們進一步再將數字加上 1 做修正。
這種對「1’ s 補數法」的進一步修正，我們稱為「**2’ s 補數法**」
這樣要表示 0 的話，就只有 000 一種寫法了；負數會從 -1 開始計算。

| 十進位 | 1的補數 |
|---|---|
| 7 | 0111 |
| 6 | 0110 |
| 5 | 0101 |
| 4 | 0100 |
| 3 | 0011 |
| 2 | 0010 |
| 1 | 0001 |
| 0 | 0000 |
| -0 | 1111 |
| -1 | 1110 |
| -2 | 1101 |
| -3 | 1100 |
| -4 | 1011 |
| -5 | 1010 |
| -6 | 1001 |
| -7 | 1000 |

# 負數表示法的發展-2’s 補數法

- 以4個bit為例
- 為了改善，所以我們進一步再將數字加上 1 做修正。這種對「1’ s 補數法」的進一步修正，我們稱為「2’ s 補數法」

| 十進位 | 1的補數 | 2的補數 |
|---|---|---|
| 7 | 0111 | 0111 |
| 6 | 0110 | 0110 |
| 5 | 0101 | 0101 |
| 4 | 0100 | 0100 |
| 3 | 0011 | 0011 |
| 2 | 0010 | 0010 |
| 1 | 0001 | 0001 |
| 0 | 0000 | 0000 |
| -0 | 1111 | 0000 |
| -1 | 1110 | 1111 |
| -2 | 1101 | 1101 |
| -3 | 1100 | 1101 |
| -4 | 1011 | 1100 |
| -5 | 1010 | 1011 |
| -6 | 1001 | 1010 |
| -7 | 1000 | 1001 |

0

# 位元運算子 ~（NOT）

```c
#include <stdio.h>
#include <limits.h>

int main(){
    unsigned short int x = USHRT_MAX, y = 0;
    short int a = SHRT_MAX, b = SHRT_MIN;
    printf("NOT(%u) = %u\n", x, (unsigned short int )~x); // NOT(65535) = 0
    printf("NOT(%u) = %u\n", y, (unsigned short int )~y); // NOT(0) = 65535
    printf("NOT(%d) = %d\n", a, (short int)~a); // NOT(32767) = -32768
    printf("NOT(%d) = %d\n", b, (short int)~b); // NOT(-32768) = 32767
    return 0;
}
```